

## Chapitre 2 : Evaluation des obligations

### Pourquoi évaluer les titres (contrats à revenus fixes)

- une obligation peut être revendue avant son échéance
- un emprunt peut être renégocié

### Actualisation d'une séquence de flux (rappel)

La valeur actuelle (en  $t = 0$ ) d'une série de flux monétaires identiques  $A$  est obtenue à partir de l'actualisation de chaque élément de la série. Les flux peuvent être positif ou négatifs.

Avec  $i$  le taux d'actualisation constant, on obtient pour  $n$  années,

$$VA = \sum \frac{A}{(1+i)^t}$$

Soit

$$VA = A \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

**Exemple :** un titre financier vous rapportera 100 u.m. sur les 3 prochaines années. Quelle est la valeur de ce titre sachant que le taux sans risque est de 6% ?

$$VA = A \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = 100 \times \frac{1 - (1 + 0.06)^{-3}}{0.06} = 267,30$$

Si le taux d'intérêt passe à 7%, la valeur de l'obligation devient alors,

$$VA = 100 \times \frac{1 - (1 + 0.07)^{-3}}{0.07} = 262,3$$

Ainsi, si un investisseur achète l'obligation au prix de 267,3 u.m. et la détient jusqu'à son échéance, son rendement annuel sera de 6%. En l'achetant au prix de 262,3 son rendement montera à 7%.

De même, le prix d'une obligation à revenu fixe évolue en sens inverse avec l'évolution des taux d'intérêt. En effet, les investisseurs

n'achèteront les obligations offrant des revenus fixes que si elles offrent des rendements compétitifs en comparaison avec ceux disponibles sur le marché.

Etant donné que les taux d'intérêt sont par nature incertains, il s'ensuit que les prix des titres à revenus fixes sont incertains jusqu'à leur maturité.

Dans la pratique, l'évaluation des TRF est beaucoup plus complexe en raison des problèmes liés au choix du taux d'actualisation à utiliser. En effet, les taux d'intérêt de marché ne sont pas tous identiques pour toutes les maturités. L'utilisation d'un taux unique pour l'évaluation des flux des différentes années n'est appropriée que dans le cas d'une courbe de taux plate. Dans le cas contraire, l'approche est totalement différente.

## **Comment évaluer une obligation ?**

Etape 1 : Evaluer une obligation zéro coupon (un seul cash flow)

Etape 2 : exprimer l'obligation comme une suite d'obligations zéro coupon)

Etape 3 : évaluer l'obligation ordinaire

### **Etape 1 : Les obligations zéro coupon**

**Définition** : une obligation zéro coupon est une obligation qui ne verse qu'un seul cash-flow à l'échéance (la valeur de remboursement). Aucun coupon intermédiaire n'est versé pendant sa durée de vie.

Etant donné qu'elles sont représentées seulement par deux cash-flows, les obligations ZC sont faciles à évaluer.

### **Le taux de rendement actuariel TRA des ZC**

Exemple : l'obligation XY est émise à 1000 u.m. et sera remboursée dans un an pour 1050 u.m. Son taux de rendement est égal à,

$$\frac{1050 - 1000}{1000} = 5\%$$

Ce taux de rendement est aussi le taux d'intérêt  $i$  qui rend équivalents le prix d'émission de l'obligation et sa valeur de remboursement, définit par,

$$1000 = \frac{1050}{(1 + i)}$$

Ce taux est aussi désigné par le taux de rendement actuariel à l'émission de l'obligation.

**Exemple 2 :** l'obligation YY est émise à 1000 u.m. et sera remboursée dans deux ans à 1210 u.m.

Son TRA à l'émission  $i$  vérifie la relation suivante,  $1000 = \frac{1210}{(1 + i)^2}$

Ce qui donne,  $i = 10\%$ .

### **Les obligations zéro coupon : le taux d'actualisation unique**

Toute obligation peut être décomposée en une somme d'obligations zéro coupon d'échéances différentes.

La valeur de l'obligation globale est égale à la somme des valeurs des obligations zéro coupon.

**Exemple :** soit une obligation ordinaire qui verse 100 u.m. sur les trois prochaines années.

Pour pouvoir évaluer cette obligation on peut la décomposer en une série de trois ZC d'échéances respectives de 1, 2 et 3 années.

Nous disposons des cotations distinctes de 3 obligations ZC,

Echéance	Cotation en % VN	TRA (annuel)
1 an	95%	5,26%
2 ans	88%	6,60%
3 ans	80%	7.72%

1/ Estimer les valeurs actuelles des 3 cash-flows

- cash-flow 1 :  $CF1 = 100 \times 0,95 = 100 / 1,0526 = 95 u.m.$
- Cash-flow 2 :  $CF2 = 100 \times 0,88 = 100 / 1,0660^2 = 88 u.m.$
- Cash-flow 3 :  $CF3 = 100 \times 0,80 = 100 / 1,0772^3 = 80 u.m.$

Ce qui donne une valeur actuelle totale  $VA = \sum \frac{CF_t}{(1 + z_t)^t} = 263 u.m.$

2/ Calcul du taux unique  $i$

L'étape suivante consiste à retrouver le taux unique qui sera appliqué à cette obligation.

Comment alors déterminer le taux d'intérêt unique qui sera utilisé pour l'évaluation de l'obligation ordinaire ?

C'est le taux qui permet d'égaliser la valeur actuelle totale avec les flux de l'obligation. Ce taux vérifie donc la relation,

$$263 = \sum \frac{100}{(1+i)^t},$$

Ce qui donne  $i = 6,88\%$ .

Ce taux n'est cependant pas un taux de marché. Il n'est directement observable. Ainsi la seule manière pour pouvoir évaluer un TRF dans le cas d'une courbe de taux non plate est la suivante :

- Déterminer la valeur actuelle de chacun des flux en utilisant le taux du zéro coupon correspondant à sa maturité ;
- Faire la somme de toutes les valeurs actuelles ainsi obtenues.



## Rendements des obligations couponées

**Principe 1 : Lorsque le prix d'une obligation est égale à sa valeur faciale, son rendement est égale à son taux de coupon.**

Il s'agit d'obligations au pair.

**Exemple :** Une obligation de valeur nominale 1000 u.m. émise il y'a 19 ans (où la courbe des taux était plate) au taux de coupon de 10% et remboursée au pair sur 20 ans. Actuellement le taux d'intérêt à un an se situe à 5%.

Le prix de marché de cette obligations est égal à,

$$P_{19} = \frac{100 + 1000}{1,05} = 1047,62 \text{ u.m.}$$

Le prix de l'obligation est supérieur à sa valeur nominale, l'obligation est dite en prime (premium bond)

Quel est son rendement ?

Il y'a deux rendements qui peuvent être calculés.

**Le rendement actuel** : qui correspond au coupon annuel divisé par le prix de marché de l'obligation. Soit,

$$\text{Rendement actuel} = \frac{\text{Coupon}}{\text{Prix}} = \frac{100}{1047,62} = 9,55\%$$

Le rendement actuel surévalue le vrai rendement de l'obligation en prime en ignorant le fait qu'à l'échéance l'investisseur recevra uniquement 1000 u.m. C'est-à-dire un montant inférieur au prix payé de 47,62 u.m.

Pour tenir compte de cette différence, on calcule le **rendement à l'échéance** donné par,

$$\text{Rdt à l'échéance} = \frac{\text{Coupon} + \text{VN} - \text{Prix}}{\text{Prix}} = \frac{100 + 1000 - 1047,62}{1047,62} = 5\%$$

### **Taux de rendement à l'échéance : généralisation**

Le taux de rendement à l'échéance intègre la totalité des revenus perçus de l'obligation, y compris son remboursement.

Pour une obligation ayant un nombre  $n - d$  de cash-flows restant à verser, le TRA à l'échéance est le taux  $i$ , tel que,

$$VA = \sum_{d+1}^n \frac{c}{(1+i)^{t-d}} + \frac{R}{(1+i)^{n-d}}$$

**Principe 2 : pour les obligations en prime ( $\text{Prix} > \text{VN}$ ) le rendement à l'échéance est inférieur au rendement actuel qui à son tour est moins élevé que le taux nominal.**

**Principe 3 : pour les obligations en décote ( $\text{Prix} < \text{VN}$ ) le rendement à l'échéance est supérieur au rendement actuel qui à son tour est plus élevé que le taux nominal.**